

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1948-006

B L v d Waerden & J Korevaan

Verdamping in een turbulente atmosfeer

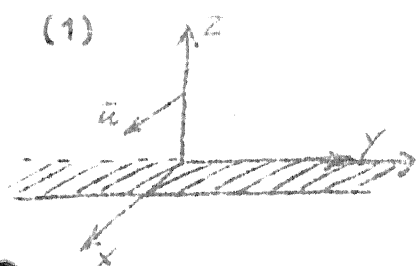
Betreft: Probleem Dr. L.J.L. Dey.



Verdamping in een turbulente atmosfeer.

§ 1. Het probleem. Evenwijdig aan een vlak bodem met de "ruwheidsparemeter" z_0 waait een stationaire wind met de componenten

$$(1) \quad \begin{cases} \bar{u}(z) = \frac{1}{K} \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \log \frac{z + z_0}{z_0} \\ \bar{v} = 0 \\ \bar{w} = 0 \end{cases}$$



Van $x = 0$ tot $x = x_0$ strekt zich een wateroppervlak uit, waar de wind dwars overheen strijkt. Gevraagd wordt de hoeveelheid water te berekenen, die per tijdseenheid en per lengte-eenheid van de waterstrook door turbulente uitwisseling onder stationaire omstandigheden verdampt.

Zij $q(x, z)$ de "specifieke vochtigheid" van de lucht, dan geldt voor de uitwisseling de vergelijking

$$(2) \quad \rho \bar{u} \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\eta \frac{\partial q}{\partial z} \right)$$

met de randvoorwaarden

$$(3) \quad \begin{cases} q(x, 0) = q_0 & (0 \leq x \leq x_0) \\ q(0, z) = 0 \\ q(x, z) \rightarrow 0 & (z \rightarrow \infty). \end{cases}$$

De "uitwisselingscoëfficiënt" η in (2) wordt gegeven door de vergelijking

$$(4) \quad \eta(z) = \rho K \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} (z + z_0)$$

§ 2. Algemeen karakter van de oplossing.

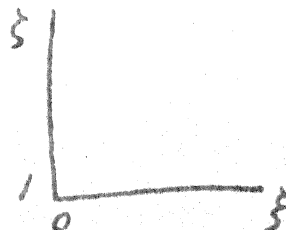
Wij substitueren in (2)

$$(5) \quad z + z_0 = z_0 \xi, \quad x = c \xi.$$

Voor geschikt gekozen c worden de vergelijking en de randvoorwaarden

$$(6) \quad \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \frac{\partial q}{\partial \xi} \right) = \frac{\partial q}{\partial \xi}$$

$$(7) \quad \begin{cases} q(\xi, \xi) = q_0(\xi) & \text{voor } \xi = 1 \\ q(\xi, \xi) = 0 & \text{voor } \xi = 0 \\ q(\xi, \xi) \rightarrow 0 & \text{voor } \xi \rightarrow \infty \end{cases}$$



*) Voor de betekenis van z_0, K, τ_0, ρ en de afleiding der in § 1 voorkomende vergelijkingen zie men dr L.J.L. Dey, Beschouwingen over turbulentie en haar invloed op de wind- en vochtverdeling in de onderste lagen van de atmosfeer.

Wanneer wij in (6) de factoren $\frac{1}{\log \xi}$ en (tussen haakjes) ξ weglaten krijgen wij de warmtegeleidingsvergelijking

$$(6a) \quad \frac{\partial^2 q}{\partial \xi^2} = \frac{\partial q}{\partial \xi}$$

Nemen wij als randvoorwaarden

$$(7a) \quad \begin{cases} q(\xi, \zeta) = q_0 \text{ (constant) voor } \zeta = 1 \\ q(\xi, \zeta) = 0 \text{ voor } \zeta = 0 \\ q(\xi, \zeta) \rightarrow 0 \text{ voor } \xi \rightarrow \infty \end{cases}$$

dan wordt de oplossing zoals bekend gegeven door

$$(8a) \quad q(\xi, \zeta) = \frac{2q_0}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\zeta-1}{\xi}}^{\infty} e^{-t^2} dt$$

Men kan dit gemakkelijk afleiden door eerst speciale oplossingen $q(\xi, \zeta)$ van (6a) te zoeken van de gedaante $u(\xi)v(\zeta)$. (Vgl. Frank-v. Mises, Differentialgleichungen der Physik II, 532 e.v.). In het geval (6) leidt substitutie van $q(\xi, \zeta) = u(\xi)v(\zeta)$ tot de vergelijkingen

$$(8) \quad \frac{1}{u} \frac{du}{d\xi} = -\lambda^2, \quad \frac{d}{d\zeta} \left(\xi \frac{dv}{d\zeta} \right) + \lambda^2 v \xi = 0$$

Zowel de tweede vergelijking als de randvoorwaarden geven moeilijkheden. Men kan de moeilijkheden meer gescheiden aanvatten na toepassing van een Laplace-transformatie.

§ 3. Laplace-transformatie. ')

De Laplacegetransformeerde van de functie $q(\xi, \zeta)$, nl.

$$(9) \quad Q(p, \zeta) = \int_0^{\infty} q(\xi, \zeta) e^{-p\xi} d\xi$$

voldoet aan de differentiaalvergelijking

$$(10) \quad \frac{d}{d\zeta} \left(\xi \frac{dQ}{d\zeta} \right) - pQ \log \xi = 0$$

met beginvoorwaarden

$$Q(p, \zeta) = \int_0^{\infty} q_0(\xi) e^{-p\xi} d\xi \quad \text{voor } \zeta = 1$$

$$Q(p, \zeta) \rightarrow 0 \text{ voor } \zeta \rightarrow \infty.$$

Omgekeerd vindt men q uit Q met behulp van de relatie

$$(12) \quad q(\xi, \zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} Q(p, \zeta) e^{p\xi} dp \quad (\sigma > 0)$$

Voor $\xi < 0$ levert de integraal (12) $q(\xi, \zeta) = 0$; uit (11) volgen ook de overige randvoorwaarden (7)

In het reeds eerder beschouwde geval van de warmtegeleiding (6a), (7a) komt er door de Laplace-transformatie

$$(10a) \quad \frac{d^2 Q}{d\zeta^2} - pQ = 0$$

met beginvoorwaarden

$$(11a) \quad \begin{cases} Q(p, \zeta) = \frac{q_0}{p} \text{ voor } \zeta = 1 \\ Q(p, \zeta) \rightarrow 0 \text{ voor } \zeta \rightarrow \infty \end{cases}$$

De oplossing van (10a) luidt

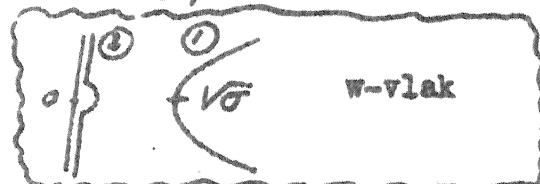
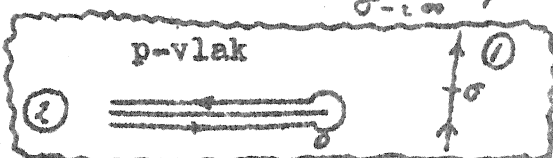
$$Q(p, \zeta) = c_1 e^{\sqrt{p}\zeta} + c_2 e^{-\sqrt{p}\zeta}$$

Om aan de randvoorwaarden te voldoen, moet $c_1 = 0$ en $c_2 = e^{-\sqrt{p}} \frac{q_0}{p}$ genomen worden:

$$Q = \frac{q_0}{p} e^{-(1-\zeta)\sqrt{p}}$$

Met behulp van (12) volgt hieruit

$$(12a) \quad q(\zeta, \zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{q_0}{p} e^{-(1-\zeta)\sqrt{p}} e^{p\zeta} dp$$



Om deze integraal te berekenen kan men als volgt redeneren. De integrand is regulier in het langs de negatieve reële as opgesneden p-vlak. Voor $\zeta > 0$, $\zeta > 1$ kan men dus wegens

$$\frac{q_0}{p} e^{-(1-\zeta)\sqrt{p}} e^{p\zeta} = O(e^{-(1-\zeta)\sqrt{p}} e^{\zeta p}) \quad (|p| \rightarrow \infty)$$

de integratieweg (1) omvormen tot de gedaante (2). Substitueert men $p = w^2$, dan krijgt men de geschetste weg (2) in het w-vlak. Met $w = i\tau$ wordt de weg de reële τ -as met een boogje om 0

$$(12b) \quad q(\zeta, \zeta) = \frac{q_0}{\pi} \int_{\mathcal{L}} \frac{1}{i\tau} e^{-(1-\zeta)i\tau} e^{-\zeta\tau^2} d\tau$$

We ontwikkelen nu:

$$e^{-(1-\zeta)i\tau} = 1 + (1-\zeta)i\tau + (1-\zeta)^2 \frac{(i\tau)^2}{2!} + \dots$$

en integreren termgewijze:

$$(12c) \quad q(\zeta, \zeta) = \frac{q_0}{\pi} \int_{\mathcal{L}} \frac{1}{i\tau} e^{-\zeta\tau^2} d\tau + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q_0}{\pi} \int_{\mathcal{L}} \frac{(1-\zeta)^k (i\tau)^{k-1}}{k!} e^{-\zeta\tau^2} d\tau$$

Daar

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tau^{k-1} e^{-\zeta\tau^2} d\tau = \begin{cases} \Gamma(n+\frac{1}{2}) \zeta^{-n-\frac{1}{2}} & \text{als } k = 2n+1 \\ 0 & \text{als } k = 2n \end{cases}$$

vinden we tenslotte

$$\begin{aligned}
 (12d) \quad q(\xi, \zeta) &= q_0 + \frac{q_0}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\Gamma(1+\frac{1}{2})}{\Gamma(2+\frac{1}{2})} \left(\frac{1-\zeta}{\sqrt{\xi}}\right)^{2n+1} \\
 &= q_0 + \frac{q_0}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2n+1} n! (2n+1)} \left(\frac{1-\zeta}{\sqrt{\xi}}\right)^{2n+1} \\
 &= q_0 + \frac{2q_0}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n! (2n+1)} \left(\frac{1-\zeta}{2\sqrt{\xi}}\right)^{2n+1} \\
 &= q_0 \left(1 + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{1-\zeta}{2\sqrt{\xi}}} e^{-t^2} dt\right) \\
 &= \frac{2q_0}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\zeta-1}{2\sqrt{\xi}}}^{\infty} e^{-t^2} dt
 \end{aligned}$$

in overeenstemming met formule (8a).

§ 4. Het probleem (6), (7).

We gaan op dezelfde wijze te werk als boven geschetst voor de warmtegeleiding.

A. We zoeken de oplossing van (10), die voor $p = (1\tau + \sigma)^2$, σ positief tot nul nadert als $\xi \rightarrow \infty$, en die ook aan de eerste randvoorwaarde (11) voldoet.

B. We substitueren $p = (1\tau)^2$ en berekenen

$$(13) \quad q(\xi, \zeta) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{1-\zeta}{\sqrt{\xi}}} (1\tau) Q\{(1\tau)^2, \zeta\} e^{-\frac{1}{2}\tau^2} d\tau \quad (\xi > 0)$$

door $Q\{(1\tau)^2, \zeta\}$ naar τ te ontwikkelen.

Bij A. We moeten allereerst een oplossing van

$$(14) \quad \frac{d}{d\xi} \left(\xi \frac{dQ}{d\xi} \right) + \tau^2 Q = 0 \quad (\tau \text{ reël})$$

vinden, die bij vervanging van τ door $\tau - i\sigma$, σ positief, tot nul nadert als $\xi \rightarrow \infty$. Wij zijn er niet in geslaagd, de vergelijking (14) op te lossen. We beschouwen daarom de volgende opgeloste vergelijking, die er enigszins bij in de buurt komt.

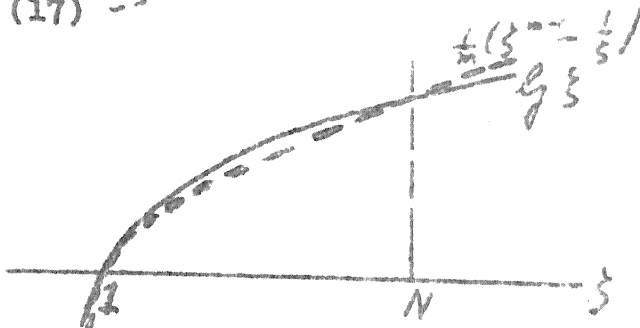
$$(15) \quad \frac{d}{d\xi} \left(\xi \frac{dQ}{d\xi} \right) + \tau^2 Q \left(\alpha^2 \xi^{m-1} - \frac{\beta^2}{\xi} \right) = 0$$

Hierin zijn α en β en $m \geq 1$ zo te kiezen, dat

$$(16) \quad \alpha^2 \xi^{m-1} - \frac{\beta^2}{\xi}$$

een zo goed mogelijke benadering vormt voor $\log \zeta$ ($\zeta \geq 1$). Eisen we, dat voor $\zeta = 1$ de beide functies en hun afgeleiden overeenstemmen, dan wordt (16)

$$(17) \quad \frac{1}{m} \left(\zeta^{m-1} - \frac{1}{\zeta} \right)$$



We kunnen tenslotte $m \geq 1$ zo bepalen, dat voor een geschikt gekozen waarde N van ζ

$$\frac{1}{m} \left(\zeta^{m-1} - \frac{1}{\zeta} \right) = \log \zeta.$$

Als $N \rightarrow 1$ zal $m \rightarrow 2$, als $N \rightarrow \infty$ zal $m \rightarrow 1$. Men zou dus de grensgevallen $m = 1$ en $m = 2$ kunnen doorrekenen,

en kunnen kijken of de resultaten veel verschillen. Voor $1 \leq \zeta \leq N$ zal de oplossing van (14) wel in de buurt liggen.

De oplossing van de vergelijking (15), waarin (17) is ingevuld voor (16), dus

$$(18) \quad \frac{d}{d\zeta} \left(\zeta \frac{dQ}{d\zeta} \right) + \frac{\tau^2}{m} Q \left(\zeta^{m-1} - \frac{1}{\zeta} \right) = 0,$$

luidt (Vgl. Kamke, Differentialgleichungen I, 440)

$$(19) \quad x_\nu \left(\frac{2\tau}{m^{1/2}} \zeta^{m/2} \right), \quad \text{met} \quad \nu = \frac{2\tau}{m^{1/2}}$$

Hierin is Z_ν een Bessel-functie van de orde ν . Wij moeten een oplossing hebben, die na substitutie van $\tau = i\sigma$ voor τ tot nul nadert, als $\zeta \rightarrow \infty$. Dan moeten we de tweede Hankel-functie kiezen:

$$(20) \quad C_2 H_\nu^{(2)} \left(\frac{2\tau}{m^{1/2}} \zeta^{m/2} \right), \quad \nu = \frac{2\tau}{m^{1/2}}$$

Vervolgens moeten wij $\sigma_2 = \sigma_2(p)$ zo bepalen, dat aan de eerste voorwaarde (11) ook voldaan is:

$$(21) \quad C_2 H_\nu^{(2)} \left(\frac{2\tau}{m^{1/2}} \right) = \int_0^\infty g_0(\xi) e^{-p\xi} d\xi, \quad i\tau = \sqrt{p}$$

Tenslotte moet dan de oplossing (20) naar τ ontwikkeld worden, en daarna kan de integraal (13) worden berekend.

§ 5. Bedenking tegen deze methode

We hebben $\log \zeta$ vervangen door

$$(17) \quad \frac{1}{m} \left(\zeta^{m-1} - \frac{1}{\zeta} \right)$$

De functie $\log \zeta$ was afkomstig van een windsnelheidsverdeling. Men treft in de literatuur voor deze windsnelheidsverdeling ook wel aan een formule van de gedaante

$$(22) \quad A \zeta^\alpha \quad (\alpha > 0)$$

Probl. Dey - 6 -

En in die gedaante hebben wij de windsnelheidsverdeling ook gebracht! Voor de windanelheidsverdeling (22), maar voor iets andere randvoorwaarden, is een uitvoerige beschouwing van de vergelijking (2) gegeven door W.G.L. Sutton, On the equation of diffusion in a turbulent medium, Proc. Roy. Soc. London (A) 182 (1943) 48 - 75. Vgl. ook F. Pasquill, Evaporation from a plane, free-liquid surface into a turbulent airstream *ibid.* 75 - 95,

(B.L. v.d. Waerden - J. Korevaar).